

# НОВЫЙ ВЗГЛЯД НА РАЗЛОЖЕНИЕ УНИПОТЕНТОВ И НОРМАЛЬНОЕ СТРОЕНИЕ ГРУПП ШЕВАЛЛЕ

А.В.Степанов

АННОТАЦИЯ. Настоящая работа продолжает цикл статей о разложении унитаров в группе Шевалле  $G(\Phi, R)$  над коммутативным кольцом  $R$  с приведенной неприводимой системой корней  $\Phi$ . Зафиксируем  $h \in G(\Phi, R)$ . Назовем элемент  $a \in G(\Phi, R)$  “хорошим”, если он лежит в унитарном радикале одной параболической подгруппы, а сопряженный с ним при помощи  $h$  – в другой параболической подгруппе (все параболические подгруппы содержат фиксированный расщепимый максимальный тор). Метод разложения унитаров состоит в представлении элементарного корневого унитарного элемента в виде произведения “хороших” элементов. Из разложения унитаров следует простое доказательство нормальности элементарной подгруппы и стандартности нормального строения группы  $G(\Phi, R)$ , однако такое разложение известно не для всех систем корней. В настоящей работе мы покажем, что для стандартности нормального строения достаточно найти один хороший элемент для общего элемента схемы  $G(\Phi, \_)$ , а также построим “хорошие” элементы. Вопрос о том, когда “хорошие” элементы порождают всю элементарную группу будет рассмотрен в следующей работе из этого цикла.

## ВВЕДЕНИЕ

Основной целью настоящей работы является новое доказательство стандартности нормального строения групп Шевалле при условии обратимости структурных констант. Пусть  $G = G(\Phi, \_)$  – групповая схема Шевалле–Демазюра с приведенной неприводимой системой корней  $\Phi$ , а  $E = E(\Phi, \_)$  – ее элементарная подгруппа. Пусть  $R$  – коммутативное кольцо с единицей. Для идеала  $\mathfrak{a}$  кольца  $R$  обозначим через  $C(R, \mathfrak{a})$  полную конгруэнц-подгруппу уровня  $\mathfrak{a}$ , а через  $E(R, \mathfrak{a})$  – относительную элементарную группу (подробно обозначения приведены в следующем параграфе).

**Определение.** Будем говорить, что нормальное строение группы  $G(R)$  стандартно, если для любой подгруппы  $H \leq G(R)$ , нормализуемой  $E(R)$ , существует единственный идеал  $\mathfrak{a}$  в  $R$  такой, что

$$E(R, \mathfrak{a}) \leq H \leq C(R, \mathfrak{a}).$$

Наше доказательство стандартности нормального строения  $G(R)$  тесно связано с техникой разложения унитаров. Зафиксируем расщепимый максимальный тор  $T$  в  $G$ . В дальнейшем будем считать, что все корневые и параболические подсхемы соответствуют  $T$ . Пусть  $h \in G(R)$ ,  $r \in R$ , а  $\alpha \in \Phi$ . Выберем параболическую подсхему  $P$  так, чтобы корневая подсхема  $X_\alpha$  содержалась бы в унитарном радикале  $U_P$  подсхемы  $P$ . Предположим, что существуют элементы  $a_1, \dots, a_m \in U_P(R)$ , произведение которых равно  $x_\alpha(r)$ , а  $a_i^h \in Q_i(R)$  при всех  $i = 1, \dots, m$ , где  $Q_i$  – некоторые параболические

---

1991 *Mathematics Subject Classification.* 20G35.

*Key words and phrases.* Группы Шевалле; параболическая подгруппа; унитарный элемент; общий элемент; универсальная локализация; нормальное строение.

Работа над этой публикацией выполнена в рамках проекта “Разложение унитаров в редуктивных группах” поддержанного грантом № 14-11-00297 Российского научного фонда.

подсхемы, а  $a_i^h = h^{-1}a_ih$ . Такое представление

$$x_\alpha(r)^h = a_1^h \dots a_m^h \in Q_1(R) \dots Q_m(R)$$

называется разложением унипотента.

Обычно с помощью какой-то вариации леммы Уайтхеда–Васерштейна удастся разложить элементы  $a_i^h$  в произведение элементарных корневых унипотентов, см., например, [4, 14]. Это дает не только непосредственное доказательство нормальности элементарной подгруппы  $E(R)$ , но и реальную оценку на длину элемента  $x_\alpha(r)^h$  в элементарных образующих, которая гораздо лучше той, которая получается с помощью локализационных доказательств нормальности.

Схема доказательства стандартности нормального строения при помощи разложения унипотентов такова, см [14]. С помощью стандартных коммутационных формул задача сводится к нахождению в любой нецентральной подгруппе  $H \leq G(R)$ , нормализуемой  $E(R)$ , хотя бы одного нетривиального элементарного корневого унипотента (см., например, [2]). Если  $h \in H$  нецентральный элемент,  $a \in U_P(R)$  таково, что  $a^h$  лежит в параболической подгруппе, то из коммутатора  $[a, h] \in H$  нетрудно изготовить корневой унипотент, который будет нетривиальным, как только  $[a, h] \neq e$ . Разложение унипотентов говорит, что элементы  $a$ , удовлетворяющие указанным условиям, порождают всю элементарную группу. Поэтому нецентральный элемент  $h$  не может коммутировать со всеми такими  $a$ , что завершает доказательство.

Обычно найти элементы  $a$ , удовлетворяющие сформулированным выше условиям, не очень сложно. Наибольшие трудности представляет доказательство того, что такие элементы порождают элементарную группу. Именно из-за этой проблемы разложение унипотентов доступно не для всех систем корней. Поэтому важным является задача описания нормального строения групп Шевалле только на основании существования “хороших” элементов.

Идею доказательства подсказывает метод общего элемента или “универсальной локализации”, как он был назван в [13]. Ясно, что вместо любого элемента  $h \in G(R)$ , где  $R$  – произвольное кольцо, достаточно рассмотреть общий элемент  $g \in G(A)$  схемы  $G$ , где  $A = \mathbb{Z}[G]$  – аффинная алгебра схемы  $G$ . Предположим, что мы нашли нетривиальный элемент  $a \in U_P(A)$  такой, что  $a^g$  лежит в некоторой параболической подгруппе  $Q(A)$ . Так как общий элемент коммутирует только с элементами центра, то, как было сказано выше, любая подгруппа, содержащая  $g$  и нормализуемая  $E(A)$ , содержит корневой элемент  $x_\beta(t)$  для некоторых  $\beta \in \Phi$  и  $t \in A$ .

Пусть теперь  $R$  – кольцо, а  $H \leq G(R)$  нормализуется группой  $E(R)$ . Отображая элемент  $g$  в произвольный элемент группы  $H$ , мы видим, что образ  $x_\beta(t)$  под действием каждого такого гомоморфизма лежит в  $H$ . Теперь мы имеем альтернативу: либо  $H$  содержит  $x_\beta(r)$  для некоторого  $r \in R \setminus \{0\}$ , и все доказано, либо  $H$  содержится в подсхеме  $S$ , определенной уравнением  $t = 0$ . Из конструкции элемента  $a$  нетрудно получить, что  $S(F) \neq G(F)$  для любого поля  $F$ . Поэтому образ  $H$  под действием любого отображения, индуцированного гомоморфизмом  $R \rightarrow F$ , является собственным нормальным делителем, а, следовательно, лежит в центре. Из этого факта центральность  $H$  вытекает стандартной редукцией по радикалу.

Заметим, что доказательство стандартности нормального строения, полученное в настоящей работе, не использует стандартность нормального строения над полем или локальным кольцом. Случай поля, а также редукция по радикалу сразу следуют из развитой в статье техники извлечения унипотентов.

## 1. ОБОЗНАЧЕНИЯ

Пусть  $a, b, c$  – элементы группы  $G$ . Через  $a^b = b^{-1}ab$  обозначается элемент, сопряженный с  $a$  при помощи  $b$ . Коммутатор  $a^{-1}b^{-1}ab$  обозначается через  $[a, b]$ . Пусть  $A$  и  $B$  – подгруппы в  $G$ . Через  $\langle A \rangle$  обозначается подгруппа, порожденная  $A$ . Подгруппа в  $G$ , порожденная элементами  $a^b$  по всем  $a \in A$  и всем  $b \in B$ , обозначается через  $A^B$ . Другими словами,  $A^B$  – это наименьшая подгруппа в  $G$ , содержащая  $A$  и нормализуемая  $B$ . Взаимный коммутант  $[A, B]$  – это подгруппа в  $G$ , порожденная всеми коммутаторами  $[a, b]$ ,  $a \in A$ ,  $b \in B$ .

Все кольца и алгебры являются коммутативными и содержат единицу, а все гомоморфизмы сохраняют единичные элементы. Мультипликативная группа кольца  $R$  обозначается через  $R^*$ . Пусть  $s \in R$ . Главная локализация в элементе  $s$  (т.е. локализация в мультипликативном подмножестве, порожденном  $s$ ) обозначается через  $R_s$ .

Пусть  $K$  – кольцо, а  $G$  – аффинная групповая схема над  $K$ . Обозначим через  $A = K[G]$  аффинную алгебру схемы  $G$ . По определению аффинной схемы элемент  $h \in G(R)$  можно отождествить с гомоморфизмом  $h : A \rightarrow R$ . Мы всегда производим это отождествление, считая, что элементами группы точек  $G(R)$  схемы  $G$  над  $K$ -алгеброй  $R$  как раз и являются гомоморфизмы из  $A$  в  $R$ . Обозначим через  $g \in G(A)$  – общий элемент схемы  $G$ , т.е. тождественное отображение  $\text{id}_A : A \rightarrow A$ . Элемент  $h \in G(R)$  индуцирует гомоморфизм групп точек  $G(h) : G(A) \rightarrow G(R)$  по правилу  $G(h)(a) = h \circ a$  для всех  $a \in G(A)$ . Отсюда следует, что образ элемента  $g$  под действием  $G(h)$  равен  $h$ . В дальнейшем для кольцевого гомоморфизма  $\varphi : R \rightarrow R'$  мы обозначаем индуцированный гомоморфизм  $G(\varphi) : G(R) \rightarrow G(R')$  тем же символом  $\varphi$ . Это не может привести к путанице, потому что всегда можно определить смысл символа  $\varphi$  по типу аргумента этого гомоморфизма. В соответствии с этой договоренностью имеем  $h(g) = h \circ \text{id}_A = h$ . Если  $R$  – подкольцо в  $R'$ , то обычно мы отождествляем элементы группы  $G(R)$  с их каноническими образами в  $G(R')$ . Обозначения  $A$  и  $g$ , введенные выше, сохраняются на протяжении всей работы.

В дальнейшем  $G = G(\Phi, -)$  обозначает групповую схему Шевалле–Демазюра над  $\mathbb{Z}$  с приведенной неприводимой системой корней  $\Phi$  ранга, большего 1. По определению в групповой схеме  $G$  существует расщепимый максимальный тор  $T$ . Зафиксируем  $T$  и условимся, что все корневые подгруппы нормализуются этим тором, а все параболические подгруппы его содержат. Пусть  $E$  – элементарная подгруппа в  $G$ , т.е. подгруппа, порожденная корневыми подгруппами.

Центр группы  $G(R)$  обозначается через  $C(R)$ . Пусть  $\mathfrak{a}$  идеал кольца  $R$ . Как обычно, главной конгруэнц-подгруппой  $G(R, \mathfrak{a})$  называется ядро гомоморфизма редукции  $\rho_{\mathfrak{a}} : G(R) \rightarrow G(R/\mathfrak{a})$ , а полной конгруэнц-подгруппой  $C(R, \mathfrak{a})$  – прообраз  $C(R/\mathfrak{a})$  при этом гомоморфизме. Через  $E(R, \mathfrak{a})$  обозначается относительная элементарная подгруппа, т.е. нормальное замыкание в  $E(R)$  подгруппы, порожденной всеми элементарными корневыми унипотентами  $x_{\alpha}(r)$ ,  $\alpha \in \Phi$ ,  $r \in \mathfrak{a}$ .

Основной результат настоящей работы будет доказан при выполнении следующего условия.

**Условие 1.1.** Если  $\Phi$  имеет двойные связи (т.е.  $\Phi = B_l, C_l$  или  $F_4$ ), то  $2 \in R^*$ . Если  $\Phi = G_2$ , то  $3 \in R^*$ , и  $R$  не имеет полей вычетов из двух элементов.

## 2. РАЗЛОЖЕНИЯ БРЮА И ГАУССА

Зафиксируем борелевскую подгруппу  $B$ , содержащую тор  $T$ . Пусть  $U$  и  $U^-$  обозначают унипотентные радикалы борелевской подгруппы  $B$  и противоположной к ней. Обозначим через  $W$  группу Вейля системы корней  $\Phi$ . Пусть  $N = N_G(T)$  – схемный нормализатор тора  $T$ , т.е. наибольшая подсхема в  $G$  такая, что  $N(R)$  нормализует  $T(R)$  для любого кольца  $R$  (в соответствии с [9, Exr. 11, Corollaire 5.3 bis] такая подсхема существует). Факторсхема  $N/T$  изоморфна конечной групповой схеме, ассоциированной с  $W$  т.е.  $N/T(R)$  отождествляется с некоторым подмножеством групповой алгебры  $RW$ , содержащим  $W$ , при этом, если в  $R$  нет нетривиальных идемпотентов, то  $N/T(R) = W$ . Элемент  $\dot{w} \in N(R)$  называется представителем  $w \in W$ , если его канонический образ в  $N/T(R)$  равен  $w$ . Очевидно, что любые 2 представителя  $w \in W$  в  $N(R)$  отличаются на элемент из  $T(R)$ . Поэтому клетка Гаусса  $\mathfrak{G}_w = wTUU^-$  не зависит от представителя элемента  $w$ , а данный элемент  $a \in \mathfrak{G}_w(R)$  может быть записан в виде  $a = \dot{w}uv$  для некоторых  $\dot{w} \in N(R)$ ,  $u \in U(R)$ , и  $v \in U^-(R)$ .

Для корня  $\alpha \in \Phi$  и обратимого элемента  $\varepsilon$  кольца  $R$  положим  $w_\alpha(\varepsilon) = x_\alpha(\varepsilon)x_{-\alpha}(-\varepsilon^{-1})x_\alpha(\varepsilon)$ . Легко видеть, что  $w_\alpha(\varepsilon) \in N(R)$ , а его образ  $s_\alpha$  в группе Вейля – это отражение относительно корня  $\alpha$ . Следовательно, для любого элемента  $w = \prod_i s_{\alpha_i} \in W$ , существует прообраз  $\dot{w} = \prod w_{\alpha_i}(1)$  в группе  $N(R)$ , пришедший из  $E(\mathbb{Z})$ . Хорошо известно, что он действует на корневых элементах следующим образом

$$(2.1) \quad x_\alpha(r)^{\dot{w}} = x_{w(\alpha)}(\pm r)$$

Если  $F$  – поле, то группа точек  $G(F)$  разбивается в дизъюнктное объединение клеток Брюа  $B(F)wB(F)$  по всем  $w \in W$ , см. [8, пункт 2.11]. Известно также, что большая клетка Брюа  $Bw_0B$ , где  $w_0$  – самый длинный элемент группы Вейля, является главной открытой подсхемой в  $G$ , см., например, [10, стр. 160]. Так как  $w_0^2 = 1$  и  $w_0Bw_0 = B^-$ , то клетки Гаусса

$$\mathcal{G}_w = BB^-w = Bw_0B(w_0w)$$

являются сдвигами большой клетки Брюа. Следовательно, они также являются главными открытыми подсхемами в  $G$ . Для данного  $w \in W$  клетка Брюа содержится в соответствующей клетке Гаусса:

$$BwB = BwU_w = BU_w^{w^{-1}}w \subseteq BU^-w = \mathcal{G}_w.$$

Поэтому над полем  $F$  клетки Гаусса  $\mathcal{G}_w(F)$  покрывают группу точек  $G(F)$ , что означает, что семейство

$$\{\mathcal{G}_w \mid w \in W\}$$

является покрытием схемы  $G$  главными открытыми подмножествами.

Для параболической подгруппы  $P$  через  $U_P$  обозначается ее унипотентный радикал, а через  $L_P$  – ее подгруппа Леви. Мы не настаиваем, чтобы все параболические подгруппы содержали одну и ту же борелевскую, однако все они по умолчанию будут содержать тор  $T$ . Если зафиксирован порядок на системе корней, то стандартной борелевской подгруппой называется борелевская подгруппа, содержащая все корневые подгруппы, соответствующие положительным корням. Параболическая подгруппа называется стандартной, если она содержит стандартную борелевскую подгруппу.

### 3. ОСНОВНЫЕ РЕДУКЦИИ

В этом параграфе приведены хорошо известные утверждения, которые сводят доказательство теоремы о нормальном строении к нахождению в любой нецентральной подгруппе  $G(R)$ , нормализуемой  $E(R)$ , элемента из собственной параболической подгруппы. Их доказательства в различной степени общности можно найти в работах [11, 7, 15, 6, 2].

Первое из этих утверждений – вычисление уровня подгруппы  $H \leq G(R)$ , нормализуемых  $E(R)$ . В общем случае уровень – это допустимая пара  $(\mathfrak{q}^s, \mathfrak{q}^l)$  аддитивных подгрупп кольца  $R$  такая, что пересечение  $H$  с корневой подгруппой  $X_\alpha(R)$  равно  $X_\alpha(\mathfrak{q}^s)$  для короткого корня  $\alpha \in \Phi$  и  $X_\alpha(\mathfrak{q}^l)$  для длинного  $\alpha$ . При обратимых структурных константах ситуация упрощается, а именно,  $\mathfrak{q}^s = \mathfrak{q}^l$  является идеалом кольца  $R$ . Для того, чтобы сформулировать этот результат, введем следующее обозначение: для  $\alpha \in \Phi$  положим  $\mathfrak{q}_\alpha(H) = \{t \in R \mid x_\alpha(t) \in H\}$ .

**Лемма 3.1.** *Предположим, что система корней  $\Phi$  и кольцо  $R$  удовлетворяют условию 1.1. Пусть  $H$  – подгруппа в  $G(R)$ , нормализуемая  $E(R)$ . Тогда  $\mathfrak{q}_\alpha(H)$  не зависит от корня  $\alpha \in \Phi$  и является идеалом в  $R$ .*

В дальнейшем идеал  $\mathfrak{q}_\alpha(H)$  будет обозначаться через  $\mathfrak{q}(H)$  и называться уровнем подгруппы  $H$ . Для доказательства стандартности нормального строения, таким образом, достаточно доказать, что  $H \leq C(R, \mathfrak{q}(H))$ . Факторизуем по идеалу  $\mathfrak{q}(H)$ . Если  $H$  лежит в центре, то все доказано. В противном случае мы докажем, что  $H$  содержит корневой унипотент, который с помощью стандартной коммутационной формулы

$$[E(R), G(R, \mathfrak{q})] = E(R, \mathfrak{q})$$

поднимается до корневого унипотента, лежащего в  $H \setminus E(R, \mathfrak{q})$ , что противоречит определению уровня.

**Лемма 3.2.** *Предположим, что для любой нецентральной подгруппы  $H \leq G(\bar{R})$ , нормализуемая  $E(\bar{R})$  над любым факторкольцом  $\bar{R}$  кольца  $R$  содержит нетривиальный корневой унипотентный элемент. Тогда нормальное строение группы  $G(R)$  стандартно.*

В полной линейной группе извлечение унипотентов происходило следующим образом: сначала из произвольной матрицы получали матрицу с нулевым элементом, затем – с нулевым столбцом, а потом из нее извлекали корневой унипотент (элементарную трансвекцию), см., например, [5, 1]. Аналогом матрицы с нулевым столбцом в произвольной группе Шевалле является элемент из параболической подгруппы. Действительно, из элемента параболической подгруппы всегда можно извлечь нетривиальный корневой унипотент. Это утверждение было доказано в [2, Теорема 1]

**Лемма 3.3.** *Пусть  $H$  – подгруппа группы Шевалле  $G(\Phi, R)$ , нормализуемая элементарной подгруппой  $E(\Phi, R)$ . Предположим, что для некоторой параболической подсхемы  $P$  в  $G(\Phi, -)$  пересечение  $H \cap P(R)$  не содержится в центре группы  $G(\Phi, R)$ . Тогда в  $H$  найдется нетривиальный корневой элемент  $x_\alpha(r)$ ,  $\alpha \in \Phi$ ,  $r \in R \setminus \{0\}$ .*

### 4. ИЗВЛЕЧЕНИЕ УНИПОТЕНТОВ

Аналогом матрицы с нулем, является элемент, содержащийся в произведении непротиположных параболических подгрупп. Используя лемму 4.2 можно извлечь нетривиальный корневой унипотент из такого элемента, нам, однако, понадобится немного другой случай. А именно, в лемме 4.2 мы извлечем корневой унипотент из  $U_Q(R)P(R)$ ,

где  $P$  и  $Q$  – произвольные параболические подгруппы, содержащие данный расщепимый максимальный тор. Стандартное препятствие на этом пути – элементы, которые почти коммутируют с корневой подгруппой. Следующее утверждение, хорошо известное специалистам, решает эту проблему.

**Лемма 4.1.** *Пусть  $a \in G(R)$  такой элемент, что  $[a, X_\alpha(R)] \subseteq C(R)$ . Тогда  $a$  содержится в группе точек собственной параболической подгруппы.*

В дальнейшем мы несколько раз применим следующее коммутаторное соотношение, которое легко проверяется непосредственным вычислением. Пусть  $x, y, z$  – элементы абстрактной группы  $G$ . Тогда

$$(4.1) \quad [x, yz]^{z^{-1}} = (x^{-1})^{z^{-1}} x^y = [z^{-1}, x] \cdot [x, y].$$

**Лемма 4.2.** *Пусть  $P, Q$  – две произвольные параболические подгруппы, содержащие выбранный расщепимый максимальный тор. Предположим, что  $H$  содержит нецентральный элемент из  $U_Q(R)P(R)$ . Тогда  $H$  содержит нетривиальный корневой унитарный элемент.*

*Доказательство.* Ясно, что  $P$  можно считать максимальной параболической, а  $Q$  – борелевской подгруппой, так что  $U_Q = U$ . Так как ранг  $\Phi$  не меньше двух, то существует корневая подгруппа  $X_\alpha$ , содержащаяся в пересечении  $U \cap L_P$ .

По условию существуют  $a \in U(R)$  и  $b \in P^-(R)$  такие, что  $ab \in H$ . Пусть  $U^{(0)}(R) = U(R)$ , а  $U^{(i+1)}(R) = [U^{(i)}(R), U(R)]$ . Так как группа  $U(R)$  нильпотентна, существует такое  $k \in \mathbb{N}$ , что  $U_Q^{(k)}(R) = \{1\}$ . Пусть  $i$  наибольшее целое число такое, что  $a \in U^{(i)}(R)$ . Проведем доказательство индукцией по  $k - i$ .

Если  $i = k$ , то  $a = 1$ , и утверждение совпадает с леммой 3.3. В противном случае по формуле (4.1) для произвольного  $r \in R$  имеем

$$[x_\alpha(r), ab]^{b^{-1}} = [b^{-1}, x_\alpha(r)] \cdot [x_\alpha(r), a] \in (P(R)U_Q^{(i+1)}(R)) \cap H.$$

Если для любого  $r$  этот элемент централен, то унитар извлекается по леммам 4.1 и 3.3, в противном случае, воспользуемся индукционным предположением.  $\square$

В частности, при  $Q = P^- = B$  последняя лемма позволяет извлекать унитары из главной клетки Гаусса. Этот частный случай позволит нам бороться с подрадикальными подгруппами.

**Следствие 4.3.** *Пусть  $J$  – радикал Джекобсона кольца  $R$ . Если  $H \cap G(R, J) \not\subseteq C(R)$ , то  $H$  содержит нетривиальный корневой унитар.*

*Доказательство.* Клетка Гаусса является главной открытой подсхемой в  $G$ , поэтому утверждение о том, что элемент принадлежит этой клетке равносильно тому, что он отображает некоторый элемент аффинной алгебры в обратимый элемент кольца  $R$ . Обратимость не меняется при факторизации по радикалу Джекобсона, поэтому любой элемент из  $G(R, J)$  лежит в тех же главных открытых подмножествах, что и единица. С другой стороны очевидно, что единица лежит в главной клетке Гаусса. Следовательно,  $H$  содержит нецентральный элемент из главной клетки Гаусса, и, по лемме 4.2, содержит нетривиальный корневой унитар.  $\square$

Из следующего вычисления сразу следует стандартность нормального строения группы Шевалле над полем.

**Лемма 4.4.** *Предположим, что  $H$  содержит нецентральный элемент из некоторой клетки Гаусса  $U^-(R)B(R)w$ . Тогда  $H$  содержит нетривиальный корневой унитарный элемент.*

*Доказательство.* Предположим, что  $a = bcw \in H$  для некоторых  $b \in U^-(R)$ ,  $c \in B(R)$  и некоторого прообраза  $w$  элемента  $w$  в группе  $N(R)$ . Пусть  $\alpha \neq \beta$  – простые корни,  $P = P_\alpha^w$ , а  $Q = P_\beta^-$ . Тогда  $H$  содержит элемент

$$h = [x_\alpha(r)^{b^{-1}}, a] = x_\alpha(-r)^{b^{-1}} x_\alpha(r)^{b^{-1}a} = x_\alpha(-r)^{b^{-1}} x_\alpha(r)^{cw} \in Q(R)U_P(R).$$

Если этот элемент не лежит в центре, то по лемме 4.2  $H$  содержит нетривиальный корневой унипотент. Если же  $h$  лежит в центре для любого  $r \in R$ , то и элемент  $h^b = [x_\alpha(r), a^b]$  централен, откуда  $a^b \in H$  – нецентральный элемент, коммутирующий с корневой подгруппой  $X_\alpha(R)$  по модулю центра. По лемме 4.1  $a^b$  лежит в собственной параболической подгруппе. Тогда по лемме 3.3 подгруппа  $H$  содержит нетривиальный корневой унипотент.  $\square$

Из последней леммы сразу следует возможность извлечения унипотентов из элементов конгруэнц-подгруппы уровня радикала Джекобсона, а также случай поля.

**Следствие 4.5.** Пусть  $R$  – поле, удовлетворяющее условию 1.1, а  $H$  – подгруппа в  $G(R)$ , нормализуемая  $E(R)$ . Тогда  $H$  либо содержится в центре  $G(R)$ , либо содержит  $E(R)$ .

*Доказательство.* Если  $R$  – поле, то каждый элемент группы  $G(R)$  содержится хотя бы в одной клетке Гаусса. Если  $H$  содержит нецентральный элемент, то по лемме 4.4  $H$  содержит нетривиальный корневой унипотент. По лемме 3.1 отсюда сразу следует, что  $H$  содержит  $E(R)$ .  $\square$

## 5. НОВЫЙ ВЗГЛЯД НА РАЗЛОЖЕНИЕ УНИПОТЕНТОВ

Напомним, что  $A = \mathbb{Z}[G]$  обозначает аффинную алгебру групповой схемы Шевалле–Демажюра  $G = G(\Phi, -)$ , а  $g \in G(A)$  – ее общий элемент. Так как группа  $G$  является связной, то  $A$  – область целостности. Обозначим через  $F$  поле частных алгебры  $A$ . Мы будем отождествлять элементы группы  $G(A)$  с их каноническими образами в  $G(F)$ . Для любого элемента  $w \in W$  клетка Гаусса  $\mathfrak{G}_w = UB^-w$  является главной открытой подсхемой в  $G$  (см. [10, II, 1.9]), следовательно  $g \in \mathfrak{G}_w(F)$ . Зафиксируем элементы  $u \in U(F)$ ,  $b \in B^-(F)$  и  $w \in N(\mathbb{Z})$  такие, что  $g = ubw$ .

Пусть  $P$  – собственная параболическая подсхема в  $G$ . Возьмем элемент  $v \in L_P(A) \cap U(A)$  и рассмотрим элемент  $a = v^{u^{-1}} \in U(F)$ . С помощью принципа избавления от знаменателей (см., например, следствие 5.3 работы [12]) можно добиться того, что  $a \in U(A)$  (на самом деле, так как все происходит внутри унипотентной подгруппы, принцип избавления от знаменателей сразу следует из коммутационной формулы Шевалле). Ясно, что  $a^g = v^{bw} \in P^-(F)^w \cap G(A) \leq P^-(A)^w$ . Таким образом,  $a$  является “хорошим” элементом. Другими словами, множество хороших элементов содержит группу  $J_w = (L_P(A) \cap U(A))^{u^{-1}} \cap E(A)$  для любого  $w \in W$ . Для доказательства различных утверждений методом разложения унипотентов достаточно показать, что подгруппа, порожденная всеми  $J_w$  содержит хотя бы одну корневую подгруппу для корня каждой длины.

Однако, как было сказано во введении, для целей настоящей работы достаточно показать, что для любого кольца  $R$  образ  $h(a)$  извлеченного элемента не лежит в центре хотя бы для одного  $h \in G(R)$ . Обозначим через  $H_g = \langle g \rangle^{E(A)}$  – наименьшую подгруппу в  $G(A)$ , содержащую  $g$  и нормализуемую  $E(A)$ .

**Лемма 5.1.** Пусть  $P$  – параболическая подсхема в  $G$ , а  $w \in W$ . Существует элемент  $c \in H_g$ , лежащий в произведении  $P^-(A)^{\dot{w}}U(A)$ . При этом группа точек подсхемы  $S$  над кольцом  $R$ , заданная равенством

$$S(R) = \{h \in G(R) \mid h(c) \in C(R)\}$$

является собственным подмножеством в  $G(R)$  для любого  $R \neq \{0\}$ .

*Доказательство.* Обозначим через  $s$  элемент аффинной алгебры  $A$ , для которого  $\mathfrak{G}_w = \text{Sp}_{\mathbb{Z}} A_s$ . Зафиксируем элементы  $u \in U(A_s)$ ,  $b \in B^-(A_s)$  и  $\dot{w} \in N(\mathbb{Z})$  такие, что  $g = ub\dot{w}$ . Пусть  $\alpha \in \Phi$  положительный корень, для которого  $X_\alpha \leq L_P$ . По принципу избавления от знаменателей [12, следствие 5.3] существует натуральное число  $k$  такое, что  $a = x_\alpha(s^k)^{u^{-1}}$  лежит в группе  $E(A) \cap U(A_s) = U(A)$ . Положим

$$c = [g^{-1}, a] = a^g a^{-1} = x_\alpha(s^k)^{bw} a^{-1} \in P^-(A)^{\dot{w}}U(A) \cap H_g.$$

Ясно, что если  $w(\alpha) = \alpha$ , то можно выбрать элемент  $\dot{w}$  так, чтобы он коммутировал с корневыми подгруппами  $X_{\pm\alpha}$ . Определим теперь  $h = \in \mathfrak{G}_w(\mathbb{Z})$  следующим образом: если  $w(\alpha) = \alpha$ , то  $h = x_{-\alpha}(1)\dot{w}$ , иначе  $h = \dot{w}$ . По выбору элемента  $s$  его образ под действием гомоморфизма  $h : A \rightarrow \mathbb{Z}$  обратим в  $\mathbb{Z}$ , т.е. равен  $\pm 1$ . Для определенности будем считать, что  $h(s) = 1$  (иначе можно сменить знак у  $s$ ). Кроме того,  $h(g) = h$ , откуда  $h = h(uv\dot{w}) = h(u)h(v)\dot{w} = ex_{-\alpha}(\xi)\dot{w}$ , где  $\xi$  равно 0 или 1. В любом случае, из единственности представления  $h$  в виде элемента из  $U(\mathbb{Z})$  на элемент из  $B^-(\mathbb{Z})$  на  $\dot{w}$  следует, что  $h(u) = e$ . Получим

$$h(c) = [(x_{-\alpha}(1)\dot{w})^{-1}, x_\alpha(1)] = [x_{-\alpha}(-1), x_\alpha(1)] \text{ или } h(c) = [\dot{w}^{-1}, x_\alpha(1)] = x_{w(\alpha)}(\pm 1)x_\alpha(-1).$$

Вычисление показывает, что образ  $h(c)$  в  $G(R)$  не лежит в  $C(R)$  для любого  $R \neq \{0\}$ . Следовательно, образ  $h$  в  $G(R)$  не принадлежит  $S(R)$ .  $\square$

На самом деле, для доказательства стандартности нормального строения нам достаточно было доказать лемму 5.1 для одной параболической подсхемы  $P$  и одного элемента  $w \in W$ . Например, если  $P$  содержит  $B$ , а  $w$  – самый длинный элемент группы Вейля, то построенный элемент  $c$  сразу попадает в параболическую подгруппу  $P(A)$ . Свободу выбора  $P$  и  $w$  предполагается использовать для описания подгрупп в  $G(\Phi, R)$ , нормализуемых группой  $E(\Delta, R)$ , где  $\Delta$  – подсистема в  $\Phi$ , удовлетворяющая некоторым необходимым ограничениям (см. [3]).

## 6. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ О НОРМАЛЬНОМ СТРОЕНИИ

Для завершения доказательства теоремы о нормальном строении нам потребуется следующее утверждение, хорошо известное специалистам.

**Лемма 6.1.** Пусть  $H$  – подгруппа в  $G(R)$ , нормализуемая  $E(R)$ . Предположим, что если  $\Phi = C_2$ , то  $R$  не имеет полей вычетов из двух элементов. Тогда  $[[H, E(R)], E(R)] = [H, E(R)]$ . В частности, если  $[H, E(R)] \leq C(R)$ , то  $H \leq C(R)$ .

*Доказательство.* По [11, Следствие 4.4] при нашем предположении группа  $E(R)$  совершенна, т.е. совпадает со своим коммутантом. Используя тождество Холла–Витта имеем

$$[E(R), H] = [[E(R), E(R)], H] \leq [[H, E(R)], E(R)].$$

Обратное включение очевидно. Второе утверждение сразу следует из первого и того факта, что централизатор  $E(R)$  в  $G(R)$  совпадает с  $C(R)$ .  $\square$



**Теорема 6.2.** Пусть  $G$  – групповая схема Шевалле–Демазюра, с приведенной неприводимой системой корней  $\Phi$  ранга большего 1, а  $R$  – коммутативное кольцо с единицей. Предположим, что для  $\Phi$  и  $R$  выполнено условие 1.1. Тогда для любой подгруппы в  $H \leq G(R)$ , нормализуемой  $E(R)$ , существует единственный идеал  $\mathfrak{a}$  в  $R$  такой, что

$$E(R, \mathfrak{a}) \leq H \leq C(R, \mathfrak{a}).$$

*Доказательство.* По лемме 3.2 достаточно доказать, что если  $H$  не лежит в центре, то она содержит нетривиальный корневой унипотентный элемент. Пусть  $P$  – собственная параболическая подсхема в  $G$ ,  $w \in W$ , а  $c \in G(A)$  – элемент из леммы 5.1. Если существует  $h \in H$  такой, что  $h(c) \notin C(R)$ , то  $h(c) \in H$  нецентральный элемент из  $P^-(R)^w U(R)$ . Тогда по лемме 4.2  $H$  содержит нетривиальный корневой унипотент.

В противном случае  $H$  содержится в множестве  $R$ -точек подсхемы  $S$  из леммы 5.1. Возьмем максимальный идеал  $\mathfrak{m}$  кольца  $R$ . Образ  $\bar{H}$  подгруппы  $H$  под действием канонического гомоморфизма  $G(R) \rightarrow G(R/\mathfrak{m})$  содержится в  $S(R/\mathfrak{m})$  и нормализуется группой  $E(R/\mathfrak{m})$ . Так как  $E(R/\mathfrak{m})$  не содержится в  $S(R/\mathfrak{m})$ , то по лемме 4.5  $\bar{H}$  содержится в  $C(R/\mathfrak{m})$ . Из этого следует, что образ подгруппы  $[H, E(R)]$  в  $G(R/\mathfrak{m})$  тривиален, т. е.  $[H, E(R)] \subseteq G(R, \mathfrak{m})$ .

Так как максимальный идеал  $\mathfrak{m}$  был выбран произвольно, то  $[H, E(R)] \subseteq G(R, J)$ , где  $J$  – радикал Джекобсона кольца  $R$ . С другой стороны, по лемме 6.1  $[H, E(R)]$  не содержится в центре группы  $G(R)$ . Следовательно, по лемме 4.3 в этой группе найдется нетривиальный корневой унипотент, что завершает доказательство.  $\square$

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Борович З. И., Вавилов Н. А. *Расположение подгрупп в полной линейной группе над коммутативным кольцом*. — Тр. МИАН **165** (1984), 24–42.
- [2] Вавилов Н. А., Ставрова А. К. *Основные редукции в задаче описания нормальных подгрупп*. — Зап. научн. сем. ПОМИ **349** (2007), 30–52.
- [3] Вавилов Н. А., Степанов А. В. *Надгруппы полупростых групп*. — Вестн. СамГУ. Естественнаучн. сер. (2008), no. 3, 51–95.
- [4] Васерштейн Л. Н. *О стабилизации общей линейной группы над кольцом*. — Мат. Сб. **79** (1969), no. 3, 405–424.
- [5] Голубчик И. З. *О полной линейной группе над ассоциативным кольцом*. — УМН **28** (1973), no. 3, 179–180.
- [6] Abe E. *Normal subgroups of Chevalley groups over commutative rings*. — Contemp. Math. **83** (1989), 1–17.
- [7] Abe E., Suzuki K. *On normal subgroups of Chevalley groups over commutative rings*. — Tohoku Math. J. **28** (1976), no. 2, 185–198.
- [8] Borel A., Tits J. *Groupes réductifs*. — Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci **27** (1965), 55–150.
- [9] Demazure M., Grothendieck A. *Schémas en groupes*. Lecture Notes in Math., vol. 151–153, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1970.
- [10] Jantzen J. C. *Representations of algebraic groups, 2nd ed.* Mathematical surveys and monographs, vol. 107, AMS, 2003.
- [11] Stein M. R. *Generators, relations, and coverings of Chevalley groups over commutative rings*. — Amer. J. Math. **93** (1971), 965–1004.
- [12] Stepanov A. *Elementary calculus in Chevalley groups over rings*. — J. Prime Research in Math. **9** (2013), 79–95.
- [13] Stepanov A. V. *Structure of Chevalley groups over rings via universal localization*. — J. Algebra **450** (2016), 522–548.
- [14] Stepanov A. V., Vavilov N. A. *Decomposition of transvections: Theme with variations*. — K-Theory **19** (2000), no. 2, 109–153.
- [15] Vaserstein L. N. *On normal subgroups of Chevalley groups over commutative rings*. — Tohoku Math. J. **38** (1986), 219–230.

МАТЕМАТИКО-МЕХАНИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ “ЛЭТИ”

*E-mail address:* **stepanov239@gmail.com**